

Tentamen Integrerend project systeemtheorie, 24 januari 2011

Het tentamen bestaat uit 4 vraagstukken. U krijgt 180 minuten om deze vraagstukken te beantwoorden. U moet de antwoorden beargumenteren. De puntenwaardering kunt u vinden aan het einde van de vraagstukken.

1. We bekijken het niet-lineaire systeem, beschreven door

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x_1 &= x_1^2 + x_2^2 + x_2 \cos(x_1) + u \\ \frac{d}{dt}x_2 &= (1 + x_1)x_1 + (1 + x_2)x_2 + x_1 \sin(x_2)\end{aligned}$$

Hierin is u een input.

- Laat zien dat $(x_1^*, x_2^*, u^*) = (0, 0, 0)$ een evenwichtspunt is.
- Bepaal de linearisatie van het systeem in dit evenwichtspunt.
- Laat zien dat dit evenwichtspunt instabiel is.
- Ga na dat het gelineariseerde systeem regelbaar is.
- Bereken een toestandsterugkoppeling $u = f_1x_1 + f_2x_2$ die het gelineariseerde systeem asymptotisch stabiel maakt.

2. Beschouw het systeem Σ gegeven door

$$\frac{d}{dt}x = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u, \quad y = (1 \ 0) x. \quad (1)$$

- Is Σ regelbaar?
- Is Σ waarneembaar?
- Is Σ stabiliseerbaar?
- Is Σ detecteerbaar?
- Bestaat er een waarnemer van de vorm

$$\frac{d}{dt}\hat{x} = P\hat{x} + Qu + Ry$$

voor Σ ? Zo ja, bepaal zo'n waarnemer

- Bestaat er een stabilizerende output feedback-regelaar voor Σ ? Zo ja, bepaal zo'n regelaar.

3. Stel $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ en $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Laat $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$ de niet-waarneembare deelruimte zijn van (C, A) , i.e.,

$$\mathcal{O} = N\left(\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}\right).$$

- a. Bewijs dat \mathcal{O} een A -invariante deelruimte is.
 - b. Bewijs dat $\mathcal{O} \subseteq N(C)$.
 - c. Bewijs dat als \mathcal{L} een deelruimte van \mathbb{R}^n is die A -invariant is en voldoet aan $\mathcal{L} \subseteq N(C)$, dan geldt $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{L}$.
4. Beschouw het systeem $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$, met toestandsruimte \mathbb{R}^n , inputruimte \mathbb{R}^m en outputruimte \mathbb{R}^p . Stel dat we het systeem willen regelen door middel van een statische output-feedback van de vorm $u = Ny$, met N een reële $m \times p$ matrix. Als zo'n N bestaat die het geregelde systeem asymptotisch stabiel maakt, dan zeggen we dat het systeem kan worden gestabiliseerd door statische output feedback.
- a. Schrijf, voor gegeven $N \in \mathbb{R}^{m \times p}$, de vergelijking op van het geregelde systeem.
 - b. Bewijs: als (A, B) regelbaar is, $p = n$, en $\det(C) \neq 0$ dan bestaat er $N \in \mathbb{R}^{m \times p}$ zodat het geregelde systeem asymptotisch stabiel is.
 - c. Bewijs: als (C, A) waarneembaar is, $m = n$, en $\det(B) \neq 0$ dan bestaat er $N \in \mathbb{R}^{m \times p}$ zodat het geregelde systeem asymptotisch stabiel is.
 - d. Laat door middel van een voorbeeld zien: als $m = p = 1$ en $n > 1$, dan bestaan er A, B en C met (A, B) regelbaar en (C, A) waarneembaar, zodat het systeem $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$ *niet* kan worden gestabiliseerd door statische output feedback.

Puntenwaardering:

Vraagstuk 1: 20

Vraagstuk 2: 25

Vraagstuk 3: 20

Vraagstuk 4: 25

10 punten gratis.